

ANALYSIS

LN-Funktionen

Grundlagen

Eigenschaften

Wissen - Kompakt

Datei Nr. 46011

Neu geschrieben

Stand: 10. Juni 2014

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Man kann die Funktion $f(x) = \ln(x)$ auf verschiedene Arten im Unterricht einführen.

Ich wähle in diesem Text die Methode über Umkehrfunktionen. Im Text 46021 zeige ich einen

ganz anderen Zugang. Dort wird diese Funktion als Stammfunktion der Funktion $g(x) = \frac{1}{x}$ definiert.

Das ist vielleicht mehr eine Methode von Hochschulen. Daraus erkennt man schon dass die Logarithmusfunktionen „nicht einfach da sind“. Logarithmen entstehen durch Umkehrung von Potenzieren. Dieses Grundwissen benötigt man, wenn man es mit Logarithmusfunktionen zu tun hat, an vielen Stellen. Daher beginne ich auch mit einem Abschnitt über das Logarithmieren als Umkehrung zum Potenzieren. Man kann diesen kleinen Abschnitt überspringen.

Hinweis: In Deutschland war bisher die Schreibweise $f(x) = \ln x$ üblich.

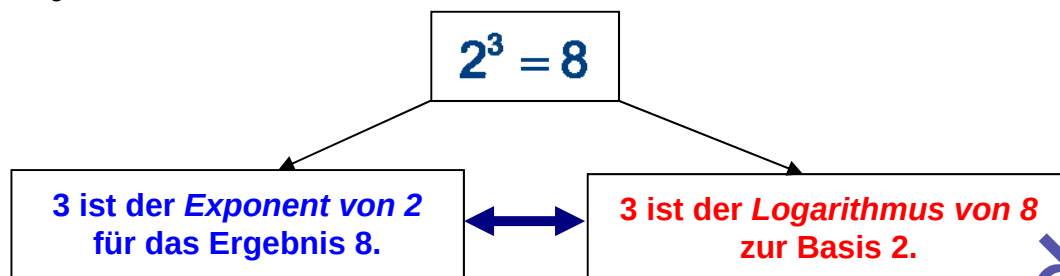
Inzwischen setzt sich immer mehr die internationale Schreibweise mit Klammer durch: $f(x) = \ln(x)$. Beides ist nebeneinander möglich. Ist aber das Argument komplizierter, muss die Klammer verwendet werden: $g(x) = \ln(x+2)$ ist eine andere Funktion als $h(x) = \ln x+2$.

Inhalt

1	Logarithmen als Umkehrung von Potenzen	3
2	$f(x) = \ln(x)$ als Umkehrfunktion von $g(x) = e^x$	5
2.1	Die Eulerscher Zahl e	5
2.2	Schaubilder der Exponentialfunktionen $g(x) = a^x$ ($a > 1$)	5
2.3	Umkehrfunktionen bilden	6
	$f(x) = \ln(x)$	8
2.4	Die Ableitung der Logarithmusfunktion	9
3	Kompliziertere Ln-Funktionen	10
4	Symmetrie-Untersuchungen	12
5	Verwendung von Ln-Regeln zur Termumformung	13

1 Logarithmen als Umkehrung von Potenzen

Die Potenz 2^3 kann jeder berechnen: $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Und die meisten kennen die Namen der in der Gleichung vorkommenden Zahlen:



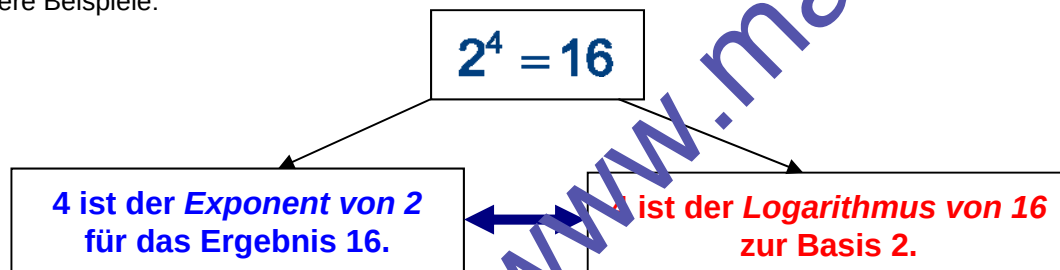
Man muss also unterscheiden:

Geht man von der Basis 2 aus, dann ist 3 der Exponent von 2.

Geht man vom Ergebnis 8 aus, dann ist 3 der Logarithmus von 8.

Logarithmus ist also ein anderer Name für Exponent oder Hochzahl. Man benutzt ihn also, wenn man man den Exponenten zu einem Ergebnis sucht.

Weitere Beispiele:



Dafür gibt es diese Schreibweise:

$2^3 = 8$	bedeutet	$\log_2 8 = 3$
$2^4 = 16$	bedeutet	$\log_2 16 = 4$
$4^2 = 16$	bedeutet	$\log_4 16 = 2$
$5^3 = 125$	bedeutet	$\log_5 125 = 3$
$3^{-2} = \frac{1}{9}$	bedeutet	$\log_3 \frac{1}{9} = -2$
$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$	bedeutet	$\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$

Dahinter steckt dieses Schema:

Basis^{Exponent} = Ergebnis bedeutet **$\log_{\text{Basis}}$ Ergebnis = Exponent**.

Aufgabe 1

Berechne die Potenz und schreibe dann um, was dies als Logarithmusgleichung bedeutet.

- a) $3^4 =$ b) $9^{\frac{1}{2}} =$ c) $5^{-3} =$ d) $\left(\frac{1}{5}\right)^2 =$

Teste Dein Wissen, schaue die Lösung auf der nächsten Seite erst an, wenn Du die Lösung aufgeschrieben hast. Dabei ist das Aufschreiben wichtig, weil gerade dabei viele Fehler passieren können.

Lösung Aufgabe 1

- a) $3^4 = 81$ bedeutet $\log_3 81 = 4$ b) $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$ bedeutet $\log_9 3 = \frac{1}{2}$
 c) $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$ bedeutet $\log_5 \frac{1}{125} = -3$ d) $\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$ bedeutet $\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{25}\right) = 2$

Die Berechnung von Logarithmen
 geschieht in vielen Fällen durch Umrechnen auf eine Potenz:

- a) $\log_2 64 = ?$ Dazu müssen wir wissen, dass sich 64 als Potenz von 2 schreiben lässt:
 $64 = 2^6$. Dann wird klar $\log_2 64 = 6$.

Man kann dies innerhalb einer Zeile erledigen, indem man folgende Umformung aufschreibt.
 Dann erkennt man (wegen der gleichen Basis) den Exponenten = den Logarithmus:

$$\log_2 64 = \log_2 2^6 = 6$$

Man ersetzt 64 durch 2^6 und liest dann ab, dass 6 die Hochzahl von 2^6 ist, bei der Basis 2.

- b) $\log_7 \frac{1}{49} = ?$ Wissen: $\frac{1}{49} = \frac{1}{7^2} = 7^{-2}$, also folgt
 $\log_7 \frac{1}{49} = \log_7 \frac{1}{7^2} = \log_7 7^{-2} = -2$

- c) $\log_{100} 10 = ?$ Wissen: $\sqrt{100} = 10$, also $100^{\frac{1}{2}} = 10$, also folgt:
 $\log_{100} 10 = \log_{100} 100^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

Aufgabe 2

Berechne die folgenden Logarithmen genauso: Stelle das **Argument** (so nennt man die Zahl, deren Logarithmus gesucht ist), wie in den Beispielen zuerst als Potenz mit der angegebenen Basis dar. Dann kann man den gesuchten Logarithmus als Exponent ablesen.

- a) $\log_3 243$ b) $\log_4 \frac{1}{16}$ c) $\log_4 2$ d) $\log_7 \sqrt{7}$
 e) $\log_4 \sqrt[3]{4}$ f) $\log_2 \frac{1}{\sqrt{2}}$ g) $\log_2 \frac{1}{128}$ h) $\log_3 \frac{1}{27}$

Hinweis: Für kompliziertere Berechnungen gibt es andere Methoden, wie z. B. die Potenzkettenmethode, die im Text 12810 gezeigt wird. Ähnliches findet man in 18150,

Ergebnisse:

- a) 5 b) -2 c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{3}$ f) $-\frac{1}{2}$ g) -7 h) -3

2 Die Funktion $f(x) = \ln(x)$ als Umkehrfunktion von $g(x) = e^x$

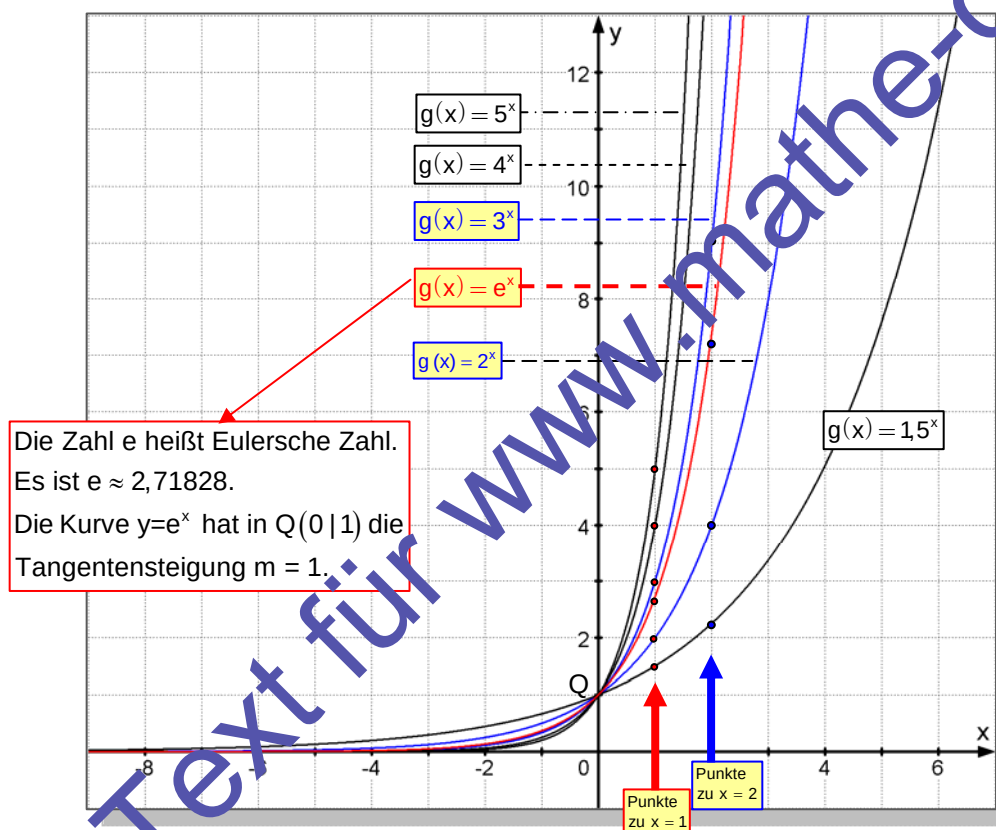
2.1 Die Eulersche Zahl e

Jetzt wird als Basis die sogenannte **Eulersche Zahl e** verwendet. Sie ist eine wichtige Zahl in der Mathematik, die vor allem bei natürlichen Wachstumsvorgängen eine entscheidende Rolle spielt. Darauf gehe ich hier nicht ein. Man muss wissen:

Die Eulersche Zahl ist eine unendliche nicht-periodische Dezimalzahl, d.h. sie ist nicht als Bruch darstellbar, aber auch nicht als Lösung einer algebraischen Gleichung.

Man merke sich den Näherungswert: $e \approx 2,71828$

2.2 Schaubilder der Exponentialfunktionen $g(x) = a^x$ für $a > 1$



Die Steilheit der Kurven wird rechts von der x-Achse mit wachsender Basis immer größer. Dies kann man in Zahlen erfassen, wenn man schon mehr Kenntnisse hat. Ich will es andeuten:

Die Ableitung der Funktion $g(x) = a^x$ lautet $g'(x) = a^x \cdot \ln(a)$. Dabei ist $\ln(a)$ dasselbe wie $\log_e(a)$.

Man braucht hier also bereits die Logarithmen zur Basis e.

Alle diese Kurven gehen durch den Punkt $Q(0 | 1)$. Die Steigung der Tangente in Q wird bekanntlich mit dieser Ableitungsfunktion berechnet.

$$g(x) = 2^x \Rightarrow g'(x) = 2^x \cdot \ln(2) \Rightarrow g'(0) = 2^0 \cdot \ln(2) \approx 0,693$$

$$g(x) = 3^x \Rightarrow g'(x) = 3^x \cdot \ln(3) \Rightarrow g'(0) = 3^0 \cdot \ln(3) \approx 1,1$$

Achtung: e ist die Zahl, deren Funktion $g(x) = e^x$ in Q die Steigung 1 hat.

Man kann aus diesem Ansatz heraus auch eine Methode zur Berechnung von e finden!